PREKIDAČKA ALGEBRA

Prekidačka (Bulova) algebra je matematička osnova za projektovanje digitalnih elektronskih kola. Osnovne logč~ke operacije su: ILI (+), I (·), NE (¯), ISKLJUČIVO ILI (⊕) i ISKLJUČIVO NILI (⊙).

a *b*	*a*+*b*	*a*·*b*	$\overline{a}$	*a*⊕*b*	*a*⊙*b*
0 0	0	0	1	0	1
0 1	1	0	1	1	0
1 0	1	0	0	1	0
1 1	1	1	0	0	1

Tabela 1. Tablica istinitosti osnovnih logičkih funkcija

Identiteti Bulove algebre:

1. Operacije sa logičkom nulom:

$$0 \cdot A = 0$$
$$0 + A = A$$

2. Operacije sa logičkom jedinicom:

$$1 \cdot A = A$$
$$1 + A = 1$$

3. Operacije sa istovetnim vrednostima:

$$A \cdot A = A$$
$$A + A = A$$

4. Operacije sa komplementiranim vrednostima:

$$A \cdot \overline{A} = 0$$
$$A + \overline{A} = 1$$

Zakoni Bulove algebre

1. Zakon komutacije:

$$A + B = B + A$$
$$A \cdot B = B \cdot A$$

2. Zakon asocijacije:

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$
$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

3. Zakon distribucije:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$
$$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$$

De Morganova teorema:

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$
$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

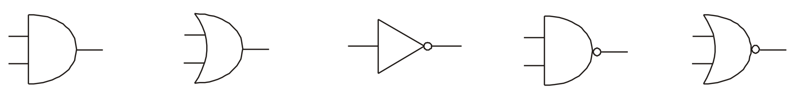
Uopštena De Morganova teorema:

$$\overline{X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n} = \overline{X_1} + \overline{X_2} + \ldots + \overline{X_n}$$
$$\overline{X_1 + X_2 + \ldots + X_n} = \overline{X_1} \cdot \overline{X_2} \cdot \ldots \cdot \overline{X_n}$$

Logičke operacije i simboli njima odgovarajućih logičkih kola

Osnovne logičke operacije i simboli su:

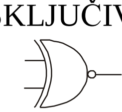
I ILI NE NI NILI



ISKLJUČIVO ILI

$$C = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B = A \oplus B$$

ISKLJUČIVO NILI



$$C = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B} = \overline{A \oplus B} = A \odot B$$

Slika 2. Simboli osnovnih kombinacionih kola

Prema De Morganovim zakonima važe sledeći identiteti:

Slika 3. Identiteti na osnovu De Morganovih zakona

Višeulazna logička kola:

Slika 4. Višeulazna logička kola

Prekidačke funkcije

Prekidačka ili logička funkcija je preslikavanje skupa uređenih binarnih n-torki u skup B={0,1} tj. f: $B^n \rightarrow B$, f=f(x_1,x_2,...,x_n).

Načini predstavljanja prekidačkih funkcija:

Tablično predstavljanje prekidačkih funkcija

a) Tabela istinitosti:

a	**b**	**c**	**f**	**g**
0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	x
1	1	0	0	x
1	1	1	0	0

Tabela 2. Tabela istinitosti

Vrednost x označava da funkcija ima proizvoljnu vrednost, tj. ili nije bitna vrednost funkcije, ili se odgovarajući slog ne pojavljuje na ulazu.

Broj slogova za funciju od *n* promenljivih je $N = 2^n$.

Broj različitih funkcija od *n* promenljivih je $M = 2^{2n}$.

b) Karnoove mape:

Za funkciju od 3 promenljive:

a \ bc	00	01	11	10
0	0	1	0	1
1	1	x	0	x

Za funkciju od 4 promenljive:

ab \ cd	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Slika 5. Karnoove mape za funkciju od 3 i od 4 promenljive

Analitičko zadavanje prekidačkih funkcija

Forme prekidačkih funkcija:

1. **Disjunktna normalna forma (DNF)** - funkcija je zadata kao suma proizvoda:

$$f(a,b,c) = \bar{a}b + \bar{a}\bar{c} + a\bar{b}c \qquad (1)$$

Potpuni proizvod (minterm) je proizvod u kome učestvuju sve promenljive.

Ako je prekidačka funkcija zadata kao suma minterma kaže se da je zadata u potpunoj disjunktnoj normalnoj formi (PDNF).

2. **Konjuktivna normalna forma (KNF)** - funkcija je zadata kao proizvod suma:

$$f(a,b,c) = (\bar{a}+\bar{b})(\bar{a}+c)(a+b+\bar{c}) \qquad (2)$$

Potpuna suma (maksterm) je suma u kojoj učestvuju sve promenljive.

Ako je prekidačka funkcija zadata kao proizvod maksterma kaže se da je zadata u potpunoj konjuktivnoj normalnoj formi (PKNF).

3. **Slobodna forma** - uključuje oba prethodna oblika:

$$f(a,b,c) = \bar{a}(b+\bar{c}) + a\bar{b}c \qquad (3)$$

Uvek je moguće preći iz jedne u bilo koju drugu formu. Navedeni primeri predstavljaju različite forme jedne iste funkcije.

Ukoliko imamo zadatu tabelu funkcija možemo doći do analitičkog oblika za tu funkciju.

a	***b***	***c***	***f***
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Tabela 3. Primer tablično zadate funkcije

PDNF se formira za one slogove za koje funkcija ima vrednost 1. Svakom takvom slogu odgovara jedan potpuni proizvod. One promenljive koje u slogu imaju vrednost 0, u proizvod ulaze sa komplementom, a koje imaju vrednost 1, bez komplementa:

$$f(a,b,c) = \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}b\bar{c} + a\bar{b}c + abc$$

PKNF se formira od onih slogova za koje funkcija ima vrednost 0. One promenljive koje u slogu imaju vrednost 0, u zbir ulaze bez komplementa, a koje imaju vrednost 1, sa komplementom:

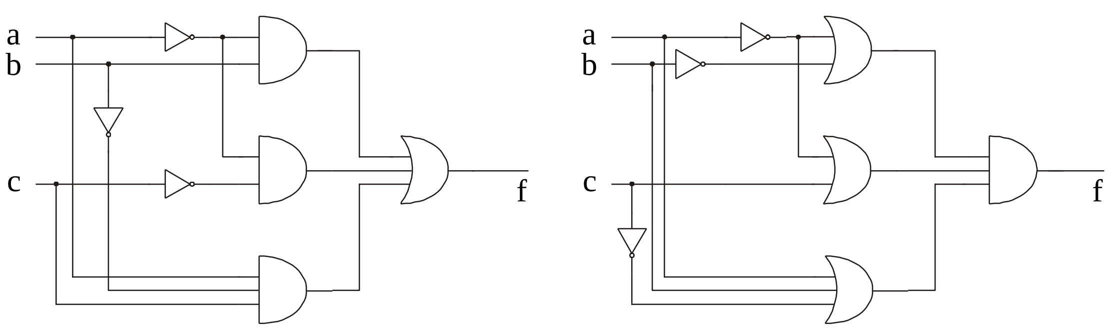
$$f(a,b,c) = (a+b+c)(a+\bar{b}+\bar{c})(\bar{a}+b+c)(\bar{a}+\bar{b}+c)$$

Sinteza prekidačkih mreža

Sinteza prekidačkih mreža se vrši na osnovu analitičkog izraza za prekidačku funkciju.

Sinteza na bazi DNF (f-ja (1)):

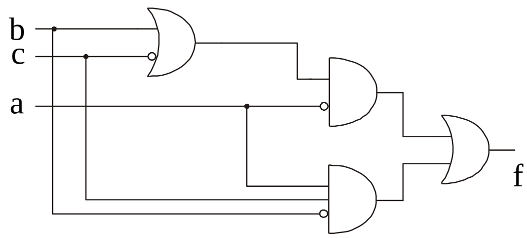
Sinteza na bazi KNF (f-ja (2)):



Slika 6. Sinteza funkcije na bazi DNF i KNF

Ovo su dvonivoiske prekidačke mreže.

Sinteza na bazi slobodne forme (f-ja (3)):



Slika 7. Sinteza funkcije na bazi slobodne forme

Slobodna forma može da ima više nivoa, a prikazani primer predstavlja tronivoisku prekidačku mrežu.

Konverzija strukture mreže

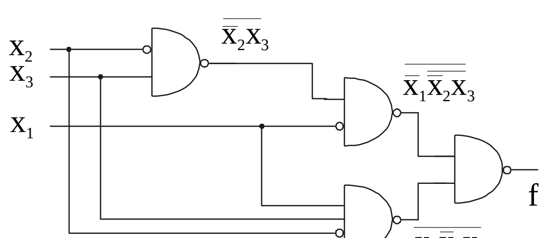
Logičke operacije (I, ILI, NE) čine potpuni skup prekidačih funkcija, jer se njima može izraziti proizvoljna prekidačka funkcija.

NI (NILI) operacija čini potpuni skup prekidačkih funkcija. Gledano sa tehnološke strane daleko je povoljnije neku prekidačku mrežu realizovati elementima istog tipa, pa je sa te strane povoljnije koristiti ili samo NI ili samo NILI logička kola.

Da bismo izvršili sintezu prekidačke funkcije samo NI (NILI) kolima neophodno je, prethodno, funkciju predstaviti u odgovarajućoj formi:

DNF→NI:

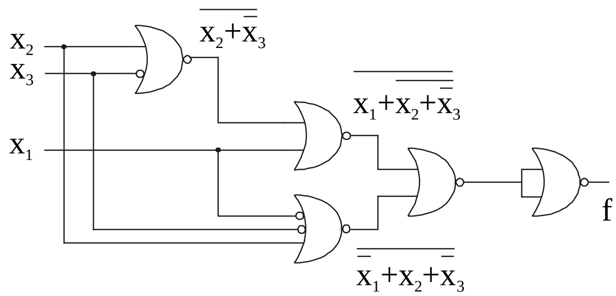
$$f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1(x_2+\bar{x}_3)+x_1\bar{x}_2x_3=\bar{x}_1\overline{\overline{(x_2+\bar{x}_3)}}+x_1\bar{x}_2x_3=\bar{x}_1(\overline{\bar{x}_2x_3})+x_1\bar{x}_2x_3=$$
$$=\overline{\overline{\bar{x}_1\overline{\bar{x}_2x_3}+x_1\bar{x}_2x_3}}=\overline{\overline{\bar{x}_1\overline{\bar{x}_2x_3}}\;\overline{x_1\bar{x}_2x_3}}$$



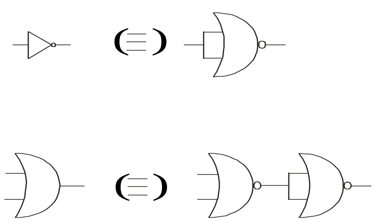
Slika 8. Primer realizacije funkcije isključivo NI kolima

KNF→NILI

$$f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1(x_2+\bar{x}_3)+x_1\bar{x}_2x_3=\overline{\overline{\bar{x}_1(x_2+\bar{x}_3)}}+\overline{\overline{x_1\bar{x}_2x_3}}=$$
$$=\overline{x_1+\overline{(x_2+\bar{x}_3)}}+\overline{\bar{x}_1+x_2+\bar{x}_3}$$



Slika 9. Primer realizacije funkcije isključivo NILI kolima



Slika 10. Realizacije NE i ILI kola pomoću NILI kola

Ako je prekidačka mreža realizovana (ILI, I, NE) kolima kao dvonivovska na bazi DNF, odgovarajuća mreža sa NI kolima se dobija zamenom svih kola u mreži NI kolima.

Isto važi za dvonivovsku mrežu na bazi KNF i NILI kola.

Minimizacija prekidačkih funkcija

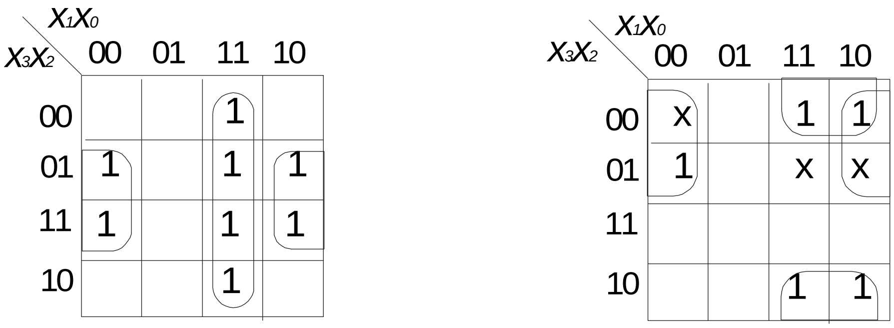
Jedna ista prekidačka funkcija može se analitički izraziti na više načina (u više različitih formi). Ova mogućnost je veoma bitna sa gledišta sinteze mreža, pa je ključno pitanje kako odrediti najpovoljniji oblik funkcije za praktičnu realizaciju.

Šta je kriterijum?

1. Minimalno kašnjenje - dvonivoiske mreže imaju najmanje kašnjenje (sinteza na bazi DNF ili KNF)
2. Broj logičkih kola (cena)
3. Broj ulaza u logička kola (cena)

Uslovi 1), 2) i 3) se svode na: naći DNF (KNF) prekidačke funkcije koja ima najmanji broj proizvoda (suma) sa najmanjim brojem promenljivih. Do ovakvog oblika se dolazi postupkom minimizacije.

2.4.1 Minimizacija prekidačkih funkcija pomoću Karnoovih mapa



$f = x_1 \cdot x_0 + x_2 \cdot \overline{x_0}$

$f = x_1 \cdot \overline{x_2} + \overline{x_3} \cdot \overline{x_0}$

Slika 11. Primer minimizacije prekidačkih funkcija pomoću Karnoovih mapa

Cilj je "pokriti" sve jedinice u Karnoovoj mapi sa što manjim brojem, što većih, pravougaonih površina. Dimenzije površina mogu biti samo stepeni dvojke.

Dva polja u Karnoovoj mapi su susedna ako se odgovarajući slogovi razlikuju samo na jednoj poziciji. Pored polja koja imaju zajedničku stranicu, susedna su i ona koja bi imala zajedničku stranicu kada bi se sastavile naspramne strane mape.

Za funkciju od 5 promenljivih crtaju se dve Karnoove mape za po 4 promenljive; u prvom slučaju peta promenljiva je fiksirana 0, a u drugom slučaju 1. Kao susedna polja posmatraju se i ona polja koja su na istim pozicijama, a na različitim mapama.